

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία $2x-y+2=0$ και κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής $y^2=8x$ στο σημείο επαφής.
2. Δίνεται η παραβολή $y^2=16x$. Μια ευθεία περνά από το σημείο $M(2,1)$ και τέμνει την παραβολή στα σημεία A και B . Αν M είναι μέσο του AB , να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας.
3. Να βρεθούν τα σημεία τομής της παραβολής $x^2=-8y$ και της ευθείας που περνά από την εστία της παραβολής και είναι παράλληλη προς την διχοτόμο της πρώτης - τρίτης γωνίας των αξόνων
4. Δίνονται οι παραβολές $(Y_1) y^2=2x$, $(Y_2) x^2=4y$. Ναδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες τους στο κοινό τους σημείο διάφορο του $(0,0)$ δεν είναι κάθετες
5. Δίνεται η παραβολή $y^2=16x$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων (ϵ_1) , (ϵ_2) της παραβολής αν $d(O,\epsilon_1)=d(O,\epsilon_2)=\sqrt{\frac{20}{25}}$
6. Δίνεται η παραβολή $y^2=x$ και η ευθεία $x+y=2$
 - α. Να δείξετε ότι τέμνονται
 - β. Αν K, Λ τα σημεία τομής τους, να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία αυτά τέμνονται σε ένα σημείο M , το οποίο βρίσκεται πάνω στη παραβολή $y^2=-\frac{1}{8}x$.
7. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής της παραβολής που έχει το σημείο $M(2,-3)$ μέσο.
8. Σε ορθοκανονικό σύστημα θεωρούμε τα σημεία $A(2,-3)$, $B(5,0)$ και τη παραβολή με εξίσωση $y=ax^2-6ax+\beta$.
 - α. Να προσδιορισθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η παραβολή να διέρχεται από τα A, B .
 - β. Δώστε τις συντεταγμένες της κορυφής της εστίας και την εξίσωση της διευθετούσας.
9. Ναδειχθεί ότι η γραμμή $y=ax^2+bx+\gamma$, $(a \neq 0)$ είναι παραβολή, με κορυφή O' και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=-\frac{\beta}{2a}$

10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$, αν γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα των x .
11. Αν A είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$ στο τυχαίο σημείο της $M(x_1, y_1)$ με τον άξονα yy' και E η εστία της παραβολής να δείξετε ότι η γωνία EAM είναι ορθή.
12. Να δείξετε ότι το σημείο τομής δύο εφαπτομένων της παραβολής $y^2=2px$ οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους βρίσκεται στη διευθετούσα.
13. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=2px$, αν γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα των x .
14. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία $2x+2y-1=0$ και κάθετη στη παραβολή $y^2=2x$
15. Δίνεται η παραβολή $y^2=4ax$, ($a \neq 0$). Θεωρούμε την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1, y_1)$, που τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο A . Ναδειχθεί ότι ο άξονας yy' περνά από το μέσο του AM .
16. Να δείξετε ότι σε κάθε παραβολή με εξίσωση $y^2=2px$ η προβολή της εστίας της πάνω σε μια τυχαία εφαπτομένη της παραβολής βρίσκεται στον yy'
17. Να δείξετε ότι το συμμετρικό της εστίας E μιας παραβολής $y^2=2px$, ως προς μια τυχαία εφαπτομένη της παραβολής είναι ένα σημείο της διευθετούσας
18. Ναδειχθεί ότι οι εφαπτομενες που άγονται από το τυχαίο σημείο της διευθετούσας της παραβολής $y^2=2px$ ($p > 0$) προς τη παραβολή σχηματίζουν ορθή γωνία.
19. Να δείξετε ότι οι υποτείνουσες των ορθογωνίων τριγώνων που είναι εγγεγραμμένα στη παραβολή $y^2=2px$ και που έχουν κορυφή της ορθής γωνίας την κορυφή O της παραβολής, περνούν από σταθερό σημείο.
20. Δίνονται οι παραβολές $(Y_1) y^2=4a(x+a)$, $(Y_2) y^2=4b(x+b)$, με $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.
Να δείξετε ότι αν $ab < 0$ οι παραβολές τέμνονται ορθογώνια.
21. Δίνεται η παραβολή $y^2=2px$, ($p > 0$) και M ένα οποιοδήποτε σημείο της. Ναδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο EM , όπου E η εστία της παραβολής, εφάπτεται στον yy' .
22. Στην παραβολή $y^2=2px$ θεωρούμε τα σημεία A και B , με τεταγμένες a και β αντίστοιχα.
α. Να βρείτε την σχέση των a και β ώστε η AB να περνά από την εστία E της παραβολής.
β. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία A και B της παραβολής τέμνονται σε ένα σημείο Γ της διευθετούσας.
γ. Αν Λ είναι το σημείο τομής των καθέτων στις εφαπτόμενες της παραβολής, στα σημεία A και B , ναδειχθεί ότι η διαγώνιος του τετραπλεύρου $\Gamma A \Lambda B$, η $\Gamma \Lambda$, είναι

παράλληλη με τον άξονα $x x'$.

23. Έστω η παραβολή με εξίσωση $y^2=2x$. Στο τυχαίο σημείο P της παραβολής φέρνουμε την εφαπτόμενη της που τέμνει τον yy' στο σημείο A . Έστω Λ το περίκεντρο του τριγώνου OPA . Να δείξετε ότι όταν το P διαγράφει την παραβολή, το Λ διαγράφει παραβολή.
24. Δίνεται η παραβολή $y=2x^2$ και τα σημεία της $O(0,0)$ και $A(1,2)$. Να βρεθεί ένα σημείο B μεταξύ των O και A ώστε το εμβαδόν του τριγώνου OAB να είναι ελάχιστο.
25. Αν μια χορδή της παραβολής $y^2=2px$ διέρχεται από την εστία της να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα άκρα της χορδής είναι κάθετες μεταξύ τους.
26. Στο σημείο $A\left(p, \frac{p}{2}\right)$ της παραβολής $x^2=2py$ ($p>0$) φέρνουμε την εφαπτόμενη (ϵ) της παραβολής και την κάθετη ευθεία στην (ϵ) που τέμνει τη παραβολή στο M . Η εφαπτόμενη της παραβολής στο M τέμνει την (ϵ) στο B . Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ABM .