

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΚΥΚΛΟ

1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $2x-3y=0$
2. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $K(1,2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $2x+y-6=0$
3. Εστω ο κύκλος με εξίσωση $(x-6)^2+(y-3)^2=1$. Να προσδιορισθούν οι εξισώσεις των ευθειών που περνούν από την αρχή των αξόνων και εφάπτονται στο κύκλο.
4. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $K(2,-1)$ που “κόβει” από την ευθεία $x-3y+6=0$ χορδή μήκους 4.
5. Να βρεθεί το μήκος της χορδής που “κόβει” ο κύκλος $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ από την ευθεία $4x-y-11=0$
6. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου του περιγεγραμμένου σε τρίγωνο με εξισώσεις πλευρών $(\epsilon_1) x+y-2=0$, $(\epsilon_2) 2x-y-1=0$, $(\epsilon_3) x-3y-3=0$
7. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο με εξισώσεις πλευρών τις $(\epsilon_1) 4x+3y-24=0$, $(\epsilon_2) 3x-4y-18=0$, $(\epsilon_3) 4x-3y+32=0$
8. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες $(\epsilon_1) 2x+3y-2=0$ και $(\epsilon_2) 4x+6y+8=0$ στο σημείο $A(1,-2)$
9. Να βρεθεί το μήκος της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ που άγεται από το σημείο $M(7,5)$
10. Να βρεθεί το μ ώστε το μήκος της εφαπτόμενης που άγεται από το σημείο $M(5,4)$ προς το κύκλο $x^2+y^2+2\mu y=0$ να είναι 10.
11. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των κύκλων $x^2+y^2-10x+16=0$ και $x^2+y^2-6y+5=0$
12. Εστω κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=10$ και το σημείο $M(4,2)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες από το σημείο M προς το κύκλο.

13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με εξισώσεις πλευρών
 $(\epsilon_1) x=1$ $(\epsilon_2) y=-3$ $(\epsilon_3) 3x+4y-11=0$
 Να βρεθούν οι εξισώσεις
 α. Του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου
 β. Του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου
 γ. Να βρεθεί το μήκος της χορδής του περιγεγραμμένου κύκλου που εφάπτεται του εγγεγραμμένου κύκλου στο σημείο $M\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$
14. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες
 $(\epsilon_1) x+y+4=0$, $(\epsilon_2) 7x-y+4=0$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $(\epsilon_3) 4x+3y-2=0$
15. Με πλευρές τις κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$ ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε έξω από αυτό τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Ναδειχθεί ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος στο $AB\Gamma$ περνά από το μέσο του ΔZ .
16. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας $(\epsilon) 3x-4y-4=0$ στο σημείο $A(0,-1)$ και περνά από το σημείο $B(-1,-8)$
17. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες
 $(\epsilon_1) 7x-y+3=0$ και $(\epsilon_2) x+y+3=0$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία
 $4x+3y+1=0$. Υπάρχει και δεύτερος κύκλος με την ιδιότητα αυτή;
18. Εστω ο κύκλος $x^2+y^2-2ax=0$, $a>0$. Μια ευθεία (ϵ) περνά από το κέντρο του κύκλου και είναι παραλληλη προς την ευθεία $(\epsilon_1) x+2y=0$. Η (ϵ) τέμνει το κύκλο στα σημεία A, B . Ναδειχθεί ότι $(OAB) = \frac{a^2}{\sqrt{5}}$
19. Εστω ένα κύκλος με διάμετρο AB και η εφαπτομένη του στο Δ που τέμνει την AB στο E . Αν $O\Gamma$ είναι η κάθετη ευθεία στην AB και Z είναι η τομή των $\Gamma\Delta$, AB , ναδειχθεί ότι το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές.
20. Εστω ο κύκλος με εξίσωση $(x-2)^2+(y-4)^2=10$ και το σημείο $A(1,2)$
 α. Ναδειχθεί ότι το A είναι εσωτερικό του κύκλου.
 β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A και που με το κύκλο ορίζει χορδή με μέσο το A .
21. Να προσδιορισθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\epsilon) 2x-y+3=0$ να ορίζει χορδή πάνω στο κύκλο $x^2+y^2-2\lambda x-2\lambda y=0$ που να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\lambda x-2\lambda y+\frac{9\lambda^2}{2}-\lambda-\frac{1}{2}=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)
- Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων
 - Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται σε δύο ευθείες των οποίων να βρεθούν οι εξισώσεις
23. Τα σημεία $A(1,3)$ και $\Gamma(5,1)$ είναι απέναντι κορυφές τετραγώνου. Να βρείτε τις άλλες δύο κορυφές του.
24. Δίνονται τα σημεία $A(a,0)$ και $B(0,\beta)$. Στη συνέχεια θεωρούμε τους κύκλους με διαμετρους OA , OB όπου O η αρχή του Oxy . Αν οι δύο κύκλοι τέμνονται στο Γ , να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
25. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=a^2$ τέμνει τον $x'x$ στα σημεία A και Γ και τον $y'y$ στα σημεία B και Δ . Τα σημεία A και B βρίσκονται στους αντίστοιχους θετικούς ημιάξονες.
- Να βρείτε τις συν/νες των σημείων A, B, Γ, Δ .
 - Εστω το σημείο $P(\alpha \sin \theta, \alpha \mu \theta)$ όπου $\sin \theta, \mu \theta \neq 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση της $P\Delta$ είναι $(1+\mu \theta)x - y \sin \theta - \alpha \sin \theta = 0$. Στη συνέχεια βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AB και ΓP .
 - Αν η ΓP τέμνει τον Oy στο M κι η $P\Delta$ τέμνει την AB στο N , τότε να δείξετε ότι η ευθεία $MN // x'x$
25. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2-2ax=0$, $a>0$. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο του και είναι παράλληλη στην $x+2y=0$. Η (ε) τέμνει τον κύκλο στα A και B . Να βρεθεί το εμβαδό του OAB .
26. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-2ax-2\beta y=\gamma$ με $a^2+\beta^2+\gamma>0$. Ναδειχθεί ότι οι εφαπτομένες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O προς αυτόν είναι κάθετες αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $a^2+\beta^2+2\gamma=0$.
27. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις $x^2+y^2=a^2$ και $x^2+y^2=\beta^2$. Από ένα σημείο $P(x_0, y_0)$ φέρνουμε μια εφαπτομένη σε καθένα από αυτούς. Αν οι εφαπτομένες αυτές είναι κάθετες ναδειχθεί ότι: $x_0^2+y_0^2=a^2+\beta^2$.
28. Η ευθεία με εξίσωση $y=ax+\beta$ τέμνει από τον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$ χορδή μήκους 2λ . Ναδειχθεί ότι: $\beta^2=(R^2-\lambda^2)(1+a^2)$.
29. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=5$. Ναδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο αυτόν από το $A(-1,3)$ είναι κάθετες.

30. Δίνονται τα σημεία $A(2\alpha,0)$, $\Gamma(0,2\alpha)$ και σχηματίζουμε το τετράγωνο $OAB\Gamma$, O η αρχή των αξόνων.
 α) Να βρεθεί η εξίσωση του εγγεγραμμένου κύκλου (C) στο τετράγωνο αυτό
 β) Μια εφαπτομένη του (C) τέμνει την προέκταση της OA στο P και την $O\Gamma$ στο T . Να δειχθεί ότι $|\overline{AP}| \cdot |\overline{TT}| = 2\alpha$.
31. Δείξτε ότι οι κύκλοι (C) : $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-2x-2\lambda=0$ με $1+\lambda \neq 0$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
32. Να βρεθεί η ευθεία $(x-y+2)+\mu(2x+y-5)=0$ που ορίζει στον κύκλο $C:(x-1)^2+(y+2)^2=4$ χορδή μήκους $\sqrt{6}$.
33. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του $C : x^2+y^2-2x-6y+9=0$ που σχηματίζουν γωνία 45° με την (ϵ) $x-y-4=0$.
35. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2+y^2=r^2$. Στο σημείο $A(0,-r)$ φέρνουμε την εφαπτομένη (ϵ). Θεωρούμε τις ϵ_1, ϵ_2 μεταβλητές εφαπτομενες του κύκλου που είναι παράλληλες. Αν M, N τα κοινά σημεία της ϵ με τις ϵ_1, ϵ_2 να δειχθεί ότι $d(A,N) \cdot d(A,M) = r^2$.
36. Δίνονται ο κύκλος $C : x^2+y^2=36$ και η ευθεία $\epsilon : y=\sqrt{3}x$. Αν κύκλος C_1 εφάπτεται στην ευθεία ϵ , στον θετικό ημιάξονα Ox , εσωτερικά στον κύκλο C και βρίσκεται στο θετικό μέρος των αξόνων.
 α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C_1
 β) Να βρεθούν οι εφαπτομένες του C_1 που είναι κάθετες στην ευθεία $4x-3y+5=0$.
37. Αν $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ με $x_1^2 + y_1^2 = \alpha x_1 + \beta y_1$, $x_2^2 + y_2^2 = \alpha x_2 + \beta y_2$, να δειχθεί ότι: $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \leq \alpha^2+\beta^2$.
38. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $C_1 : x^2+y^2=4$ και $C_2 : (x-4)^2+(y-3)^2=9$ εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης αυτών.
39. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(0,4)$, $\Gamma(-2,1)$ και οι ευθείες (ϵ) με εξίσωση $(2x-y+3)+\kappa(3x+2y-6)=0$
 α) Να βρείτε το γ.τ των σημείων M ώστε $\vec{MA}^2 - \vec{MB}^2 + \vec{MT}^2 = 7$
 β) Να βρείτε τις ευθείες (ϵ) που έχουν ένα κοινό σημείο με τον παραπάνω γ.τ.
40. Τα σημεία A και B κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς ώστε $OA+OB=\kappa$ (κ =σταθερά). Να δείξετε ότι οι κύκλοι με διάμετρο AB περνούν εκτός από το O , από δεύτερο σταθερό σημείο.
41. Να προσδιορισθεί η τιμή του μ , ώστε η χορδή που ορίζει η ευθεία $\epsilon:2x-y+3=0$ στον κύκλο $C : x^2+y^2-2\mu x-2\mu y=0$ να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

42. α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που έχουν εφαπτόμενες τις γραμμές $y=xεφω$ και $y=-xεφω$, έχουν εξισώσεις μία από τις μορφές: $x^2+y^2-2αx+α^2συν^2ω=0$ ή $x^2+y^2-2βy+β^2ημ^2ω=0$ όπου $α,β$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που διέρχονται από το σημείο $(2,6)$ και εφάπτονται των ευθειών $y=2x$ και $y=-2x$.
43. Να βρεθούν οι εξισώσεις δύο κύκλων (C_1) και (C_2) , αν είναι γνωστό ότι τέμνονται στο σημείο $A(2,3)$ και ότι έχουν κοινές εφαπτόμενες τις ευθείες $(ε_1) : 3x-4y+1=0$ και $(ε_2) : 4x+3y-7=0$.

