

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΨΗ

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $4x+3y-1=0$
2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στην έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ που περνούν από το σημείο $M(5,8)$.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης όταν $\gamma=2$ και εφάπτεται στην ευθεία $2x+3y+9=0$
4. Θεωρούμε την έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
 - α. Ναδειχθεί ότι η ευθεία $y=2x-1$ συναντά την έλλειψη σε δυο σημεία και να βρεθούν τα σημεία αυτά
 - β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στην έλλειψη που άγεται από το σημείο $A(0,-6)$
 - γ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στην έλλειψη εάν σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα xx' .
5. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στο σημείο $M(-1,1)$ της ευθείας $2x+3y-1=0$ και που το κέντρο του βρίσκεται στην εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο $A(2,0)$.
6. Θεωρούμε την έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Ναδειχθεί ότι η ευθεία που περνάει από το σημείο $M(5,0)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $6x+12y=1$ εφάπτεται της έλλειψης.
7. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που εφάπτεται στις ευθείες με εξισώσεις $x+6y-20=0$ και $3x-2y-20=0$
8. Δίνεται έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Η εφαπτομένη (ϵ) στο τυχαίο σημείο της $M(x_0, y_0)$, τέμνει τις ευθείες $x=-a$ και $x=a$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο $\Gamma\Delta$ περνά από τις εστίες της έλλειψης.
9. Ναδειχθεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών μιας έλλειψης από την εφαπτομένη της είναι σταθερό.

10. Ναδειχθεί ότι η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ από την εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι ίση με $\frac{ab}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2}}$
11. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$. Φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα xx' στην εστία $E(\gamma, 0)$. Η ευθεία τέμνει το κύκλο στα σημεία M_1, M_2 και την έλλειψη στα σημεία N_1, N_2 . Ναδειχθεί ότι $d(M_1, N_1) = \frac{ab - b^2}{a}$
12. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Σε ένα τυχαίο σημείο $M(x_0, y_0)$ φέρνουμε την εφαπτομένη (ε) και την καθετη (ε_1) στην εφαπτομένη. Αν η (ε) τέμνει τον άξονα xx' στο M_1 και η (ε_1) τέμνει τον xx' στο M_2 , να δείξετε ότι $d(OM_1) \cdot d(OM_2) = \gamma^2$
13. Από το σημείο $M(x_0, y_0)$ φέρνουμε τις εφαπτομένες στη έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Να βρεθούν η εξίσωση της χορδής που ορίζουν τα σημεία επαφής και η απόσταση του M από τη χορδή αυτή.
14. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Θεωρούμε την εφαπτομένη της έλλειψης που τέμνει τους άξονες στα σημεία K και L . Αν $M(x_0, y_0)$ είναι το μέσο του KL , να δείξετε ότι $\frac{a^2}{x_0^2} + \frac{b^2}{y_0^2} = 1$
15. Η κάθετη της έλλειψης σε ένα σημείο P αυτής, διχοτομεί την γωνία των εστιακών ακτίνων του σημείο P .
16. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Από το τυχαίο σημείο M του κύκλου φέρνουμε τις εφαπτόμενες στην έλλειψη. Ναδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.
17. Δίνεται η έλλειψη $5x^2 + 9y^2 = 45$ και το σημείο $M(3, 5)$.
 α. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής που διέρχεται από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που φέρνουμε από το σημείο M .
 β. Να δείξετε ότι το κέντρο της έλλειψης, το σημείο M και το μέσο της χορδής είναι σημεία συνευθειακά.
18. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και τα σημεία της $K(\alpha \sin \phi, \beta \mu \phi)$ και $L(\alpha \sin \theta, \beta \eta \theta)$.
 α. Να γράψετε την εξίσωση της χορδής KL .
 β. Αν η χορδή KL διέρχεται από το σημείο $Z(\delta, 0)$ να δείξετε ότι $\varepsilon \phi \frac{\phi}{2} \cdot \varepsilon \theta \frac{\theta}{2} = \frac{\delta - a}{\delta + a}$

19. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 \alpha x}{x^2}} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με εστίες $E_1(-\gamma, 0)$ και $E_2(\gamma, 0)$. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο A της έλλειψης και η κάθετη στην E_1P στο E_1 τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$