

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΗ

---

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στην υπερβολή  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  που είναι παράλληλες προς την ευθεία  $3x-4y-1=0$
2. Να βρεθεί η θέση της ευθείας  $2x-3y=\mu$  ως προς την υπερβολή  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\mu$ .
3. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στην υπερβολή  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  που είναι κάθετες με την ευθεία  $x-y-2=0$ .
4. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της ισοσκελούς υπερβολής  $x^2-y^2=1$  που άγονται από το σημείο  $A(1,7)$ .
5. Δίνεται η εξίσωση  $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$ . Ναδειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει υπερβολή, να βρεθούν τα στοιχεία της και να παρασταθεί γραφικά
6. Θεωρούμε την υπερβολή με εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Να υπολογισθεί η γωνία των ασυμπτωτών της συναρτήσει των  $a$  και  $b$ .
7. Ναδειχθεί ότι η γωνία των ασυμπτωτών μιας υπερβολής με  $e=2$  είναι  $60^\circ$
8. Δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη.
9. Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Ναδειχθεί ότι το τμήμα της εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο της  $M(x_0, y_0)$  που περιέχεται μεταξύ των ασυμπτωτών της διχοτομείται από το  $M$ .
10. Ναδειχθεί ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  και την εφαπτομένη της σε τυχαίο σημείο της έχει σταθερό εμβαδό.
11. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με εστιακή απόσταση 10 και εξισώσεις ασυμπτωτών  $\varepsilon_1: 4x-3y=0$  και  $\varepsilon_2: 4x+3y=0$

12. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου της από τις ασύμπτωτες της είναι ίσο με  $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$
13. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Εστω ότι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  οι εφαπτομένες της υπερβολής που άγονται από το σημείο  $M(x_0, y_0)$ . Να δείξετε ότι η ευθεία που περνά από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων της υπερβολής έχει εξίσωση  $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ .
14. Εστω η υπερβολή  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Εστω ότι  $K, \Lambda$  είναι δύο σημεία της που βρίσκονται στην ίδια ευθεία με την αρχή  $O$ . Να δειχθεί ότι οι παράλληλες προς τις ασύμπτωτες της υπερβολής που άγονται από τα  $K$  και  $\Lambda$  τέμνονται σε ένα σημείο  $P$  που ανήκει στη συζυγή υπερβολή.
15. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Αν οι ασύμπτωτες της σχηματίζουν γωνία  $60^\circ$  να βρεθεί η εκκεντρότητα της υπερβολής.
16. Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Να δειχθεί ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς την ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σε ένα σημείο.
17. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα κοινά σημεία μιας έλλειψης και μιας υπερβολής που έχουν τις ίδιες εστίες είναι κάθετες.
18. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση  $9x^2 - 16y^2 = 144$ , με εστίες  $E_1$  και  $E_2$ . Δίνεται και το σημείο  $M(\lambda, \mu)$  της υπερβολής.  
 α. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία  $M$  και  $E_1$  και της ευθείας που περνά από τα σημεία  $M$  και  $E_2$ .  
 β. Να προσδιορισθούν τα σημεία  $M$  για τα οποία οι προηγούμενες ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.
19. Εστω η υπερβολή  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Να δείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής και από τις ευθείες που άγονται παράλληλες από σημείο της υπερβολής προς τις ασύμπτωτες είναι σταθερό.
20. Να βρεθούν τα σημεία της υπερβολής  $x^2 - y^2 = 1$  που έχουν την ελάχιστη απόσταση από το σημείο  $A(0, 1)$ .
21. Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$  και η ευθεία  $3x + 4y - 1 = 0$ . Αφού διαπιστώσετε ότι η υπερβολή και η ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο να βρεθεί σημείο  $M$  της υπερβολής ώστε η απόσταση του από την ευθεία να είναι η ελάχιστη.

22. Έστω η υπερβολή  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  και ένα τυχαίο σημείο της  $M$  διαφορετικό από τις κορυφές. Φέρνουμε την εφαπτόμενη  $\varepsilon_1$  της υπερβολής στο  $M$  και την ευθεία  $\varepsilon_2$  που είναι κάθετη στην  $\varepsilon_1$  στο  $M$ . Η  $\varepsilon_2$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του τμήματος  $AB$  είναι μια υπερβολή της οποίας να εκφράσετε την εκκεντρότητα σαν συνάρτηση της εκκεντρότητας  $\varepsilon$  της αρχικής υπερβολής.
23. Έστω η υπερβολή  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  και ένα τυχαίο σημείο της  $A$ . Από το  $A$  φέρνουμε τις παράλληλες προς τις ασύμπτωτες της υπερβολής που τις τέμνουν στα σημεία  $M$  και  $N$ . Να αποδείξετε ότι το γινόμενο  $(AM)(AN)$  είναι σταθερό.
24. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή  $x^2 - y^2 = a^2$  και  $M$  τυχαίο σημείο της. Να αποδείξετε ότι  $\left| \vec{ME} \right| \cdot \left| \vec{ME'} \right| = \left| \vec{MO} \right|^2$  όπου  $E$  και  $E'$  οι εστίες της υπερβολής.
25. Εάν  $\varepsilon$  και  $\varepsilon_1$  οι εκκεντρότητες δυο συζυγών υπερβολών, να αποδείξετε ότι
- α.  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$
- β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$
26. Να βρεθούν τα σημεία της υπερβολής  $x^2 - y^2 = 1$  τα οποία απέχουν από το σημείο  $(0,1)$  την ελάχιστη απόσταση.
27. Να βρεθεί το σημείο της υπερβολής  $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$  το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία  $\varepsilon : 3x + 2y + 1 = 0$ .
28. Θεωρούμε την ισοσκελή υπερβολή  $x^2 - y^2 = \left(\frac{1}{2 \ln 2}\right)^2$ . Έστω τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  με  $x_1 \neq y_1$ , του ενός κλάδου της. Αν  $M(x_0, y_0)$  είναι το μέσο του  $AB$ , να δειχθεί ότι η  $AB$  τέμνει τον άξονα  $xx'$  στο σημείο  $\left(\frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0}, 0\right)$
29. Να βρεθούν τα σημεία της υπερβολής  $x^2 - y^2 = 1$  που έχουν την ελάχιστη απόσταση από το σημείο  $A(0, a)$  όπου  $a$  η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A < \text{Ρίχνω } 2 \text{ ζάρια και παίρνω άθροισμα ενδείξεων } 7 >$ .
30. Έστω η ισοσκελής υπερβολή  $xy = \frac{a^2}{2}$  και τα σημεία της  $A, B, \Gamma$  που ορίζουν τρίγωνο. Να δείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι σημείο της υπερβολής.

